UPP | EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

Guía de estudio para el Examen de Control para el ingreso a la Maestría en Mecatrónica

TEMARIO:

1. MODELADO DE SISTEMAS DINÁMICOS
   - Modelado de sistemas mecánicos.
   - Modelado de sistemas eléctricos.

2. REPRESENTACIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA Y EN FORMA MATRICIAL
   - Representación de una ecuación diferencial en el dominio de la frecuencia a través de una función de transferencia
   - Representación de una ecuación diferencia en espacio de estados en su forma canónica controlable

3. REDUCCIÓN DE DIAGRAMAS A BLOQUES.

4. COMPORTAMIENTO DE LOS SISTEMAS DE CONTROL CON RETROALIMENTACIÓN
   - Respuesta transitoria de los sistemas de primero orden.
   - Respuesta transitoria de los sistemas de segundo orden.
   - Error en estado estacionario
   - Controlador P, PD, PI y PID

5. DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL EN ESPACIO DE ESTADOS
   - Controlabilidad
   - Observabilidad
   - Diseño de un control por retroalimentación de estados
   - Diseño de un observador de estado completo

Universidad Politécnica de Pachuca
Carr. Pachuca - Cd. Sahagún Km 20, Exhacienda
de Santa Bárbara, Zempoala, Hgo., C.P. 43830
771 547 7510 www.upp.edu.mx

Ejercicios.- Los ejercicios propuestos en esta guía de estudio tiene el propósito de orientar al aspirante a los temas del examen de admisión. Además se desea que el candidato reflexione sobre los resultados y el procedimiento de los ejercicios para obtener un mayor entendimiento del tema.

1. **Se tiene un circuito RLC en serie. Resuelva lo siguiente**
   (a) Obtenga el modelo dinámico del circuito RLC
   (b) Obtenga la función de transferencia del sistema considerando como salida a la carga eléctrica
   (c) Obtenga la función de transferencia del sistema considerando como salida a la corriente
   (d) Obtenga la función de transferencia del sistema considerando como salida al voltaje de la resistencia (e_r)
   (e) Represente el sistema en espacio de estados en su forma canónica controlable con las salidas q, e_R, e_c y I

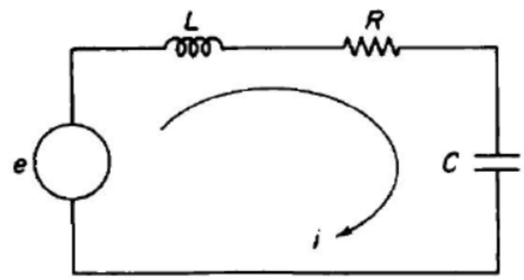

Figure 1: Circuito RLC

Universidad Politécnica de Pachuca
Carr. Pachuca - Cd. Sahagún Km 20, Exhacienda
de Santa Bárbara, Zempoala, Hgo., C.P. 43830
771 547 7510 www.upp.edu.mx

Resp. a)

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q = e$$

Resp. b)

$$\frac{q(s)}{e(s)} = \frac{C}{LCs^2 + RCs + 1}$$

Resp. c)

$$\frac{I(s)}{e(s)} = \frac{Cs}{LCs^2 + RCs + 1}$$

Resp. d)

$$\frac{e_R(s)}{e(s)} = \frac{RCs}{LCs^2 + RCs + 1}$$

Resp. e)

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} e$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R \\ \frac{1}{C} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Universidad Politécnica de Pachuca
Carr. Pachuca - Cd. Sahagún Km 20, Exhacienda
de Santa Bárbara, Zempoala, Hgo., C.P. 43830
771 547 7510 www.upp.edu.mx

2. **Considerando el modelo de dos masas conectadas mediante un resorte como se ilustra en la figura 2, si se aplica un fuerza de entrada u a la segunda masa, determine lo siguiente:**
   (a) Obtenga el modelo dinámico del sistema
   (b) Obtenga la función de transferencia del sistema considerando como salida a x_1
   (c) Obtenga la función de transferencia del sistema considerando como salida a x_2
   (d) Obtenga la función de transferencia del sistema considerando como salida a la velocidad de x_1
   (e) Represente el sistema en espacio de estados en su forma canónica controlable con las salidas x_1 y x_2

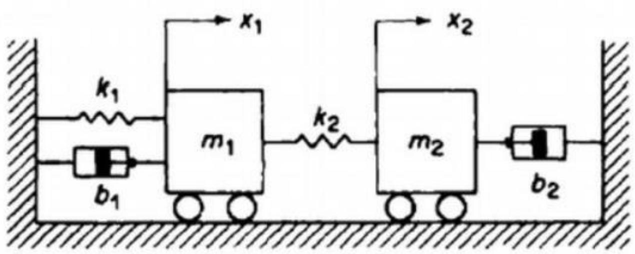

Figure 2: Sistema de dos masas

Respuesta a los incisos

Resp. a)

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + b_1\dot{x}_1 + k_1x_1 + k_2(x_1 - x_2) &= 0, \\ m_2\ddot{x}_2 + b_2\dot{x}_2 + k_2(x_2 - x_1) &= u \end{aligned}$$

Resp. b)

$$\frac{x_1(s)}{u(s)} = \frac{-k_2}{m_1m_2s^4 + (m_1b_2 + m_2b_1)s^3 + (k_2m_1 + (k_1 + k_2)m_2 + b_1b_2)s^2 + (b_1k_2 + (k_1 + k_2)b_2)s + k_1k_2}$$

Resp. c)

$$\frac{x_2(s)}{u(s)} = \frac{m_1s^2+b_1s+k_1+k_2}{m_1m_2s^4+(m_1b_2+m_2b_1)s^3+(k_2m_1+(k_1+k_2)m_2+b_1b_2)s^2+(b_1k_2+(k_1+k_2)b_2)s+k_1k_2}$$

Resp. c)

$$\frac{v_2(s)}{u(s)} = \frac{-k_2s}{m_1m_2s^4+(m_1b_2+m_2b_1)s^3+(k_2m_1+(k_1+k_2)m_2+b_1b_2)s^2+(b_1k_2+(k_1+k_2)b_2)s+k_1k_2}$$

Resp. d)

$$\begin{bmatrix}\dot{z_1}\\ \dot{z_2}\\ \dot{z_3}\\ \dot{z_4}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & -\frac{b_1}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & -\frac{k_2}{m_2} & -\frac{b_2}{m_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\\ z_4\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ \frac{1}{m_2}\end{bmatrix}u$$

$$y = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1\\ z_2\\ z_3\\ z_4\end{bmatrix}$$

3. Determine la función de transferencia en lazo cerrado de $\frac{Y(s)}{R(s)}$ de la figura 3

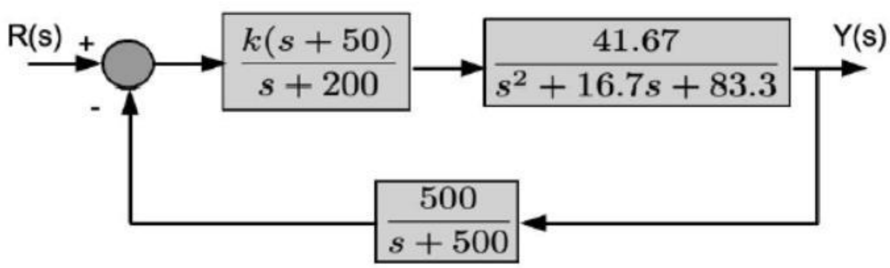

Figure 3: Primer diagrama a bloque

Resp. a)

$$\frac{41.67ks^2+22918.5ks+1041750k}{s^4+716.7s^3+111773.3s^2+(20835k+1728310)s+1041750k+8330000}$$

4. Se tiene la siguiente función de transferencia de segundo orden

$$\frac{4}{3s^2 + Ks + 5}$$

determine lo siguiente:

(a) Encuentre el valor de w_n y ζ con $K = 9$

(b) Determine el tipo de respuesta de la función de transfencia con $K = 9$

(c) Determine el valor de K con la intensión que ζ sea igual a 0.7 y mencione el tipo de respuesta

(d) Calcule los polos cuando $K = 9$ y $K = -4$

(e) Mencione la estabilidad del sistema para el inciso anterior

Respuesta a los incisos

Resp. a)

$$w_n = \sqrt{5/3}, \quad \zeta = 1.16$$

Resp. b)

Respuesta sobreamortiguada

Resp. c)

$K = 1.806$, Respuesta subamotiguado

Resp. d)

$$K = 9, \quad s_1 = -8.4051, \quad s_2 = -0.5949$$
$$K = -4, \quad s_1 = 2 + i, \quad s_2 = 2 - i$$

Resp. e)

$K = 9$, estable
$K = -4$, inestable

Universidad Politécnica de Pachuca
Carr. Pachuca - Cd. Sahagún Km 20, Exhacienda de Santa Bárbara, Zempoala, Hgo., C.P. 43830
771 547 7510 www.upp.edu.mx

5. **La figura 6 muestra un diagrama a bloque, resuelva lo siguiente:**

(a) Obtenga la función de transferencia del sistema $\frac{C(s)}{R(s)}$

(b) Obtenga la función de transferencia del sistema $\frac{E(s)}{R(s)}$

(c) Obtenga el error en estado estacionario del sistema ante una entrada de escalón unitario $R(s) = 1/s$

(d) Considere el sistema en lazo cerrado con una $k = 22$. Determine el factor de amortiguamiento relativo, la frecuencia natural del sistema, los polos y mencione el tipo de respuesta del sistema.

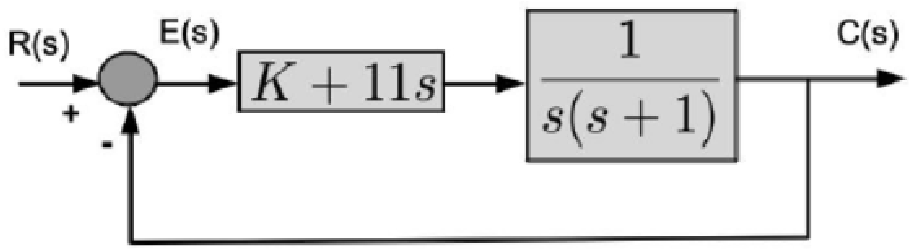

Figure 4: Segundo diagrama a bloque

Respuesta a los incisos

Resp. a)

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{11s + k}{s^2 + 12s + k}$$

Resp. b)

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{s(s+1)}{s^2 + 12s + k}$$

Resp. c)

$$e_{ss} = 0$$

Resp. d)

$$w_n = \sqrt{22}, \quad \zeta = 1.27$$
$$s_1 = -9.74, \quad s_2 = -2.25$$
$$\textit{estable}$$

Universidad Politécnica de Pachuca
Carr. Pachuca - Cd. Sahagún Km 20, Exhacienda
de Santa Bárbara, Zempoala, Hgo., C.P. 43830
771 547 7510 www.upp.edu.mx

6. Se tiene una función de transferencia de tercer orden

$$G(S) = \frac{s^2 + 4s + 3}{s^3 + 4s^2 + 8s + 3}$$

(a) Determine la estabilidad de la función de transferencia mediante el criterio de Routh-Hurwitz

(b) Obtenga los ceros de la función de transferencia

Respuesta a los incisos
Resp. a)
El sistema es estable y los polos están del lado izquierdo del plano s

Resp. b)
Los ceros del sistema son -3 y -1

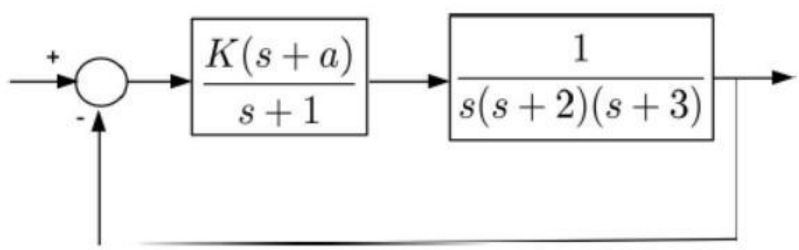

Figure 5: Tercer diagrama a bloque

7. **Determine el rango de los coeficientes a y K con el propósito que la función de transferencia en lazo cerrado sea estable (ver figura 5). Utilice el criterio de Routh-Hurwitz**

Respuesta
Resp. a)
$K < 60$; $a < \frac{(60-K)(K+6)}{36K}$

Universidad Politécnica de Pachuca
Carr. Pachuca - Cd. Sahagún Km 20, Exhacienda de Santa Bárbara, Zempoala, Hgo., C.P. 43830
771 547 7510 www.upp.edu.mx

8. **El siguiente diagrama a bloques representa un sistema retroalimentado. Considere que**

$$G_1(s) = k_1 + k_2 s; \quad G_2(s) = \frac{6}{s^2+4s-1}; \quad G_3(s) = 1$$

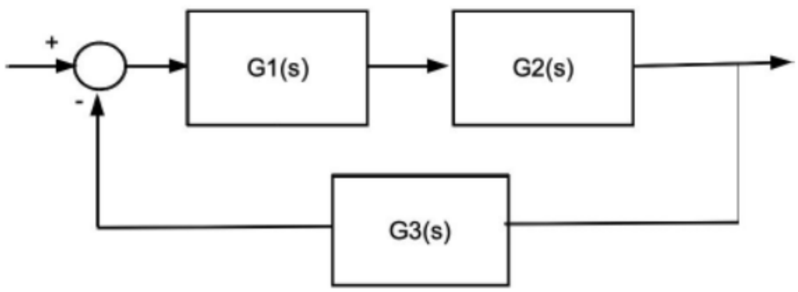

Figure 6: Cuarto diagrama a bloque

(a) Determine la estabilidad de la función de tranferencia de $G_2(s)$

(b) Establezca las condiciones de k_1 y k_2 para que el sistema en lazo cerrado sea estable

(c) Determine las ganancias del controlador con la finalidad que los polos se ubiquen en $s_1 = -4$ y $s_2 = -3$

(d) Considere a $G_2(s) = \frac{6}{s^3-3s^2+4s-1}$. Determine si es posible estabilizar el sistema con el controlador PD

(e) Considere a $G_1 = 1$, $G_2 = \frac{6}{s^2+4s+1}$ y $G_3 = 1$. Determine la estabilidad del sistema en lazo cerrado

(f) Ahora se propone que $G_3 = -1$, mientras que $G_1(s)$ y $G_2(s)$ permanencen igual que el inciso anterior. Determine la estabilidad del sistema

Respuesta a los incisos
Resp. a)
El sistema es inestable
Resp. b)
Los coeficentes deben cumplir las siguientes desigualdades $k_1 > \frac{1}{6}$; $k_2 > -\frac{4}{6}$
Resp. c)
$k_1 = 11/6$; $k_2 = 1/2$
Resp. e)
El sistema es estable
Resp. f)
El sistema es inestable

9. **El siguiente espacio de estado está representado en su forma canónica controlable.**
   (a) Encuentre su ecuación característica y determine si el sistema es estable con $k = 3$
   (b) Determine si el sistema es controlable con $k = 3$
   (c) Determine si el sistema es estable con $k = -3$
   (d) Determine si el sistema es controlable con $k = -3$
   (e) Diseñe un controlador por retroalimentación de estados con la intensión de ubicar sus polos en $s_1 = -2 + 4i$, $s_2 = -2 - 4i$ y -10 con $k = -3$
   (f) Determine si el sistema es observable con $k = 3$
   (g) Diseñe un observador de estado completo con k=3. Suponga que los valores característicos deseados de la matriz de ganancias del observador son $\mu_1 = -2 + j2\sqrt{7}$, $\mu_2 = -2 - j2\sqrt{7}$ y $\mu_3 = -7$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -k & -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Resp. a)
$s^3 + 4s^2 + 2s + 3$, el sistema es estable
Resp. b)
El sistema es controlable ya que su rango es 3.
Resp. c)

Universidad Politécnica de Pachuca
Carr. Pachuca - Cd. Sahagún Km 20, Exhacienda
de Santa Bárbara, Zempoala, Hgo., C.P. 43830
771 547 7510 www.upp.edu.mx

El sistema es inestable
Resp. d)
El sistema sigue siendo controlable
Resp. e)
$k_1 = 197$, $k_2 = 58$, $k_3 = 10$
Resp. f)
El sistema es observable
Resp. g)
$L_1 = 7$; $L_2 = 47$; $L_3 = 19$

10. **Determine si el siguiente espacio de estados es controlable y observable.**

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a & -b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Resp.
El sistema es controlable y observable

Universidad Politécnica de Pachuca
Carr. Pachuca - Cd. Sahagún Km 20, Exhacienda
de Santa Bárbara, Zempoala, Hgo., C.P. 43830
771 547 7510 www.upp.edu.mx